INFINI MATHÉMATIQUE

OC

Le symbole de l'infini a été utilisé pour la première fois par le mathématicien John Wallis, en 1655. Ce n'est pas rien ! Employer un symbole pour représenter l'infini a permis à la communauté mathématique de s'accorder sur la définition du mot et de l'utiliser plus tard dans des calculs dits infinitésimaux. Ce sont les grecs qui se sont posés les premières questions sur l'infini :

- **L'infiniment grand :** l'Univers est-il borné ou s'étend-t-il à l'infini ?
- **L'infiniment petit :** la matière est-elle discrète ou continue, c'est-à-dire divisible à l'infini ?
- **L'infini du temps :** l'Univers est-il apparu à un certain instant ou est-il éternel ?

L'infini est une notion mathématique voir philosophique qui n'a pas d'équivalent dans le monde physique. Soutenir que notre Univers serait « infini » est absurde car cela ne signifie rien en réalité. Toute théorie physique implique des nombres, en tant que tels forcément répartis sur un intervalle fini. Par conséquent un Univers infini, situé hors du domaine de la mesure, s'exclut ipso facto du cadre de la physique.

Nombres	Représentation	Variétés d'infinis
naturels :	1 2 3 4 5 … n n+1 … ∞	Un infini positif
entiers :	-∞… -n-1 - n … -3 -2 -1 0 1 2 3 … n n+1 … ∞	Deux infinis, positif et négatif.
rationnels :	Aux entiers on ajoute tous les fractionnaires	Un infini entre 2 nombres quelconques = une infinité d'infinis
irrationnels :	Aux rationnels on ajoute les √	Idem, même si on a le sentiment qu'il y plus de nombres.
transcendants :	Aux irrationnels on ajoute e, π, φ, sin, etc…	Idem, même si on a le sentiment qu'il y encore plus de nombres.

L'ensemble des nombres ci-dessus correspond aux nombres réels.

Puisqu'il est possible d'associer à chaque nombre entier un nombre pair (en le multipliant par 2 tout simplement), et à chaque nombre entier pair un nombre entier (en le divisant par 2)... il y a autant de nombres pairs que de nombres entiers ! Voilà qui est contre-intuitif et dans tous les cas, c'est paradoxal, Georg Cantor 1874. Cependant, comme ils sont infinis tous les deux, c'est normal qu'ils soient égaux, CQFD !

Le calcul différentiel fait intervenir un infiniment petit lorsque $\Delta x \to 0$

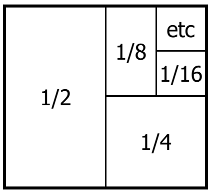
$\dfrac{Lim}{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\Big\vert_{\Delta x = 0}$	Lorsque le Δx passe à zéro dans le quotient, celui-ci reste totalement indéterminé car nous obtenons une division par zéro. Il faut manipuler la relation pour faire disparaître Δx du dénominateur.

Le calcul intégral fait intervenir un infiniment grand lorsque $n \to \infty$ et en même temps un infiniment petit lorsque $\Delta x \to 0$.

$\dfrac{lim}{n \to \infty}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot \Delta x = \int_a^b f(x_i)\cdot dx$	Si les limites de l'intégrale sont $a = 0$ et $b = \infty$, très souvent l'intégrale diverge. Dans ce cas il faut chercher la solution (si elle existe) par changement de variables.

Séries : Une série élémentaire est la somme suivante :

$$s = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$



C'est le nombre de termes qui est infini, mais pas le résultat, dans ce cas, la série est convergente.
Il est possible de démontrer que cette série se résume à la relation suivante : $s_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ lorsque n tend vers l'infini $S_n = 1$. Nous avons affaire à une série géométrique comme le montre la figure ci-contre.

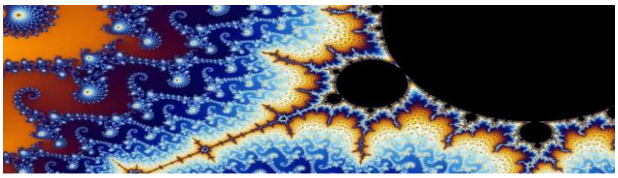
Autre exemple, pour le calcul d'une fonction trigonométrique nous pouvons utiliser des séries entières :

$cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	Les calculatrices et les ordinateurs utilisent ce genre de séries pour les fonctions trigonométriques.

Fractales : Par exemple, l'ensemble de Mandelbrot est une suite de nombres complexes définie par récurrence.

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = z^2_{n+C} \end{cases}$$

Cette suite permet d'obtenir un point (x ; y) avec une couleur précise. La suite infinie de Mandelbrot permet de faire un lien entre les mathématiques et l'art.



La descente infinie de Fermat : La descente infinie est le principe selon lequel il n'existe pas de suite strictement décroissante d'entiers positifs. On utilise ce principe pour prouver qu'il n'existe pas de solution à certains problèmes faisant intervenir des nombres entiers : si à partir d'une solution, on sait en fabriquer une autre strictement plus petite mais toujours en nombres entiers, et qu'on peut recommencer indéfiniment, alors le problème initial n'a pas de solution.

Transfini : Les nombres transfinis sont des nombres exposés et étudiés par le mathématicien Georg Cantor. Se fondant sur ses résultats, il a introduit une sorte de hiérarchie dans l'infini, en développant la théorie des ensembles. Les transfinis sont des différentes sortes d'infinis qu'il nomme par la première lettre de l'alphabet hébreu ℵ qui se lit Aleph. Pour cela, il utilise la méthode dite *bijection*.

Hourya Benis Sinaceur : La question de l'infini inquiète et il est tout à fait rassurant d'entrer dans une science exacte donnant des règles opératoires et des raisonnements impeccables qui apprennent à apprivoiser l'infini et par conséquent à calmer une partie des inquiétudes. On peut reconnaître alors que la vie est finie, qu'il n'est pas absolument nécessaire de se préoccuper métaphysiquement de l'infini, qu'il vaut mieux cibler nos inquiétudes et les appliquer à ce qui nous entoure afin que les choses aillent un petit peu moins mal. *Hourya Sinaceur est une philosophe et mathématicienne franco-marocaine née en 1940 à Casablanca.*